

Aplikasi Teorema Hamilton untuk Menentukan Rute Tour Eropa Barat

Syarifah Aisha Geubrina Yasmin 13519089
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
¹author@itb.ac.id

Abstract—Berpergian ke luar kota ataupun keluar negeri sudah menjadi hal yang lazim untuk orang-orang lakukan pada saat waktu libur, termasuk pergi dalam rangka tour mengunjungi beberapa negara dalam satu kali pergi. Tentu setiap berpindah dari satu negara ke negara lain terdapat waktu perjalanan yang dihabiskan. Jika pemilihan rute perjalanannya tidak tepat, wisatawan akan menghabiskan waktu ekstra di perjalanan, padahal waktu liburan tersebut juga terbatas. Oleh karena itu penulis mengaplikasikan teorema Hamilton untuk melihat perbedaan dari berbagai rute yang ada saat melakukan tour, dan mencari waktu tempuh paling kecil sebagai rute terbaik.

Keywords—Graf, Hamilton, Rute, Waktu.

I. PENDAHULUAN

Sebelum masa pandemic COVID-19, perjalanan liburan merupakan hal yang lazim untuk dilakukan bersama keluarga atau teman terdekat, perjalanan tersebut bisa sesederhana pergi ke tempat bermain dalam kota, atau bertemu saudara lain di luar kota, atau bahkan jalan-jalan ke luar negeri, mulai dari Singapore, Malaysia, Jepang, sampai jauh melintasi benua lainnya, salah satunya adalah benua Eropa. Tidak dapat dipungkiri, Eropa memiliki daya tarik yang tinggi sebagai destinasi wisata dengan kekayaan pemandangan yang indah, bangunan bersejarah yang menjadi tempat menarik untuk foto, sampai makanannya yang beragam dan lezat.

Namun tentu saat melakukan liburan di Eropa, waktu yang kita miliki terbatas, sedangkan banyak tempat atau negara yang ingin dikunjungi dalam waktu singkat tersebut. Lalu bagaimana cara untuk pengalaman semaksimal mungkin dalam kurun waktu liburan yang singkat? Salah satu hal yang memakan waktu saat sedang menikmati liburan adalah waktu perjalanannya. Dalam hal ini, waktu perjalanan yang diambil dapat diminimalisasi dengan memilih rute perjalanan dengan tepat. Untuk permasalahan ini kita dapat menggambarkan situasi tersebut dengan sebuah graf berbobot, dengan tiap negara merupakan simpul dan perjalanannya yang ditempuh merupakan sisi. Sementara pemilihan rute tersebut dapat diterapkan teorema Hamilton untuk memilih lintasan yang melalui semua negara dengan bobot terendah.

II. DASAR TEORI

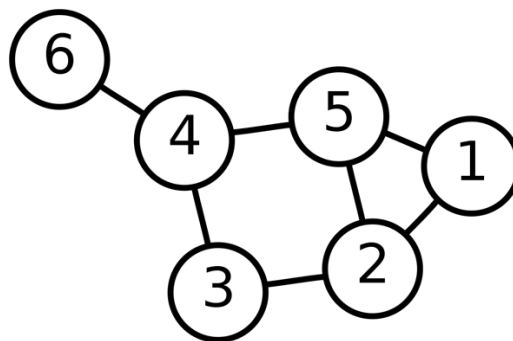
Graf

Graf dalam matematika diskrit merupakan sebuah representasi dari beberapa objek dan relasi yang dimiliki antar objek-objek tersebut. Dalam graf, representasi objek-objeknya disebut sebagai simpul (Vertex) dan representasi relasinya disebut dengan sisi (Edges) dan notasinya dalam matematika adalah $G(V,E)$.

$G(V,E)$ dalam hal ini,

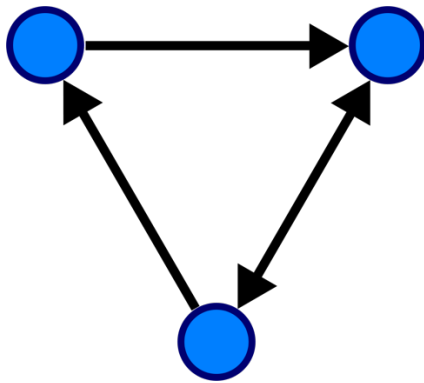
V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (vertices)
= $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$

E = himpunan sisi (edges) yang menghubungkan sepasang simpul
= $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$



Gambar 2.1 Contoh Graf

Berdasarkan dari jenis sisinya, graf dibedakan menjadi berarah dan tidak berarah. Perbedaan dari graf berarah dan tidak berarah adalah, dalam graf berarah representasi relasi antar objeknya memiliki *source* dan *destination* (s,d) dimana apabila dalam suatu graf ada relasi objek (a,b) belum tentu memiliki relasi objek (b,a).



Gambar 2.2 Contoh Graf Berarah

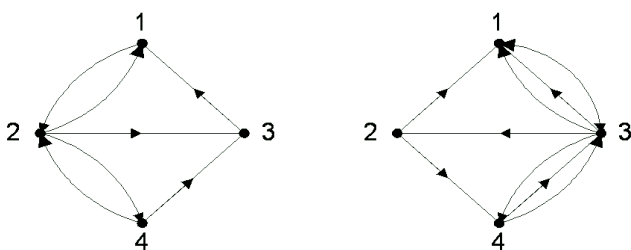
Jenis Graf

Graf dapat dibedakan berdasarkan adanya sisi gelang/ganda dan adanya sisi berarah. Berdasarkan keberadaan sisi gelang/ganda, graf dibedakan menjadi dua, yaitu graf sederhana dan graf tidak sederhana.

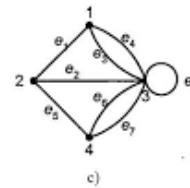
1. Graf Sederhana
Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki sisi ganda maupun sisi gelang (loop).
2. Graf Tidak Sederhana
Graf tidak sederhana dibagi lagi menjadi dua, yaitu graf ganda dan graf semu. Graf ganda adalah graf yang memiliki lebih dari satu sisi untuk menghubungkan dua simpul yang sama. Sedangkan graf semu adalah graf yang memiliki sisi untuk menghubungkan simpul dengan dirinya sendiri.

Sedangkan berdasarkan arah dari sisinya, graf dibedakan menjadi dua, yaitu graf tidak berarah dan graf berarah.

1. Graf Tidak Berarah
Graf tidak berarah adalah graf yang sisinya tidak memiliki orientasi arah (ditunjukkan pada Gambar 2.1 dan 2.4).
2. Graf Berarah
Graf berarah adalah graf yang sisi-sisinya memiliki orientasi arah sehingga representasi relasinya memiliki peran sebagai *source* dan *destination*. Bila terdapat sebuah sisi yang merepresentasikan relasi antara (a,b), maka sisi tersebut tidak mendefinisikan relasi antara (b,a). Graf Berarah sendiri terbagi lagi menjadi 2, yaitu Graf berarah biasa serta Graf berarah ganda ditunjukkan pada Gambar 2.3).



Gambar 2.3 Contoh Graf Berarah dan Graf Berarah Ganda



Gambar 2.4 Contoh Graf Semu

Jenis Graf	Orientasi Arah	Sisi Ganda	Sisi Gelang (Loop)
Graf Sederhana	Tidak	Tidak	Tidak
Graf Ganda	Tidak	Ya	Tidak
Graf Semu	Tidak	Ya	Ya
Graf Berarah	Ya	Tidak	Ya
Graf Berarah Ganda	Ya	Ya	Ya

Tabel 2.1 Jenis Graf

Terminologi Graf

Pada graf terdapat beberapa istilah yang perlu diketahui, yaitu

1. Ketetanggaan / *Adjacent*
Dua buah simpul yang dihubungkan dengan sebuah sisi.
2. Bersisian / *Incidency*
Sebuah sisi yang menghubungkan dua simpul, sebagai contoh apabila sisi a menghubungkan X dan Y, maka a bersisian X dan a bersisian Y.
3. Simpul Terpencil
Sebuah simpul yang tidak terhubung dengan simpul lainnya.
4. Graf Kosong
Graf yang simpul-simpulnya tidak terhubung sama sekali.
5. Derajat / *Degree*
Representasi dari jumlah sisi yang bersisian dengan suatu simpul. Menurut teorema Lemma Jabat Tangan, jumlah dari derajat semua simpul adalah dua kali jumlah sisinya sehingga derajat simpul yang berjumlah ganjil tidak mungkin berjumlah ganjil.
6. Lintasan / *Path*
Sisi – sisi yang dilalui dari simpul awal sampai simpul akhir,
7. Siklus / *Sirkuit*
Lintasan yang berawal dan berakhir di simpul sama.
8. Keterhubungan
Graf yang semua simpulnya saling terhubung, tetapi tidak perlu lengkap,
9. Upagraf
Graf yang terdiri dari beberapa simpul dan sisi dari graf lainnya,
10. Upagraf Merentang

Upagraf yang terdiri dari seluruh simpul graf lainnya, tetapi hanya memiliki beberapa sisinya,

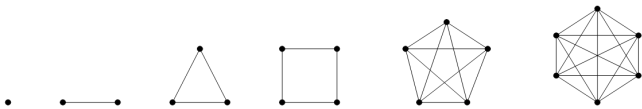
11. Graf Berbobot

Graf yang sisinya memiliki merepresentasikan sebuah nilai.

Graf Khusus

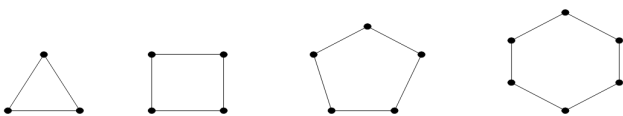
Terdapat beberapa graf yang memiliki kriteria khusus, yaitu

1. Graf lengkap : Graf yang semua simpulnya memiliki relasi dengan seluruh simpul lainnya,



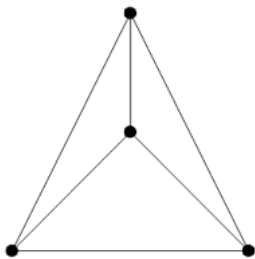
Gambar 2.5 Contoh Graf Lenkap

2. Graf lingkaran : Graf yang semua simpulnya hanya berderajat 2,



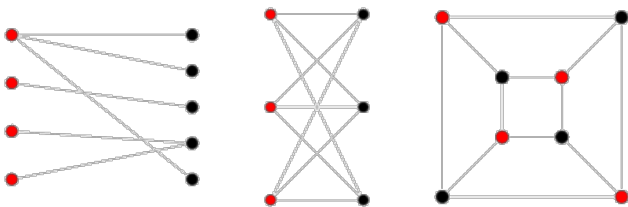
Gambar 2.6 Contoh Graf Lingkaran

3. Graf teratur : Graf yang semua simpulnya berderajat sama.



Gambar 2.7 Contoh Graf Teratur

4. Graf bipartite : Graf yang simpulnya terbagi menjadi dua bagian himpunan.



Gambar 2.8 Contoh Graf Bipartite

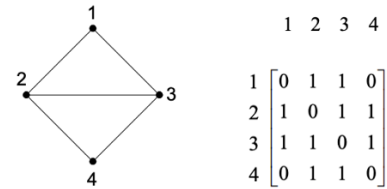
Representasi Graf

Dalam mengilustrasikan graf, tidak hanya bisa menggunakan gambar titik dan garis sebagai sisi, tetapi

terdapat pula cara merepresentasikan objek objek diskrit dan relasinya terhadap satu sama lain, yaitu sebagai berikut.

1. Matriks Ketetangaan (*Adjacency Matrix*)

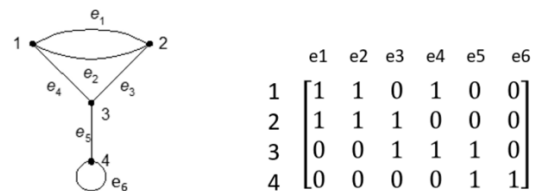
$A = [a_{ij}] \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$



Gambar 2.9 Contoh Representasi Graf dengan Matriks Tetangga

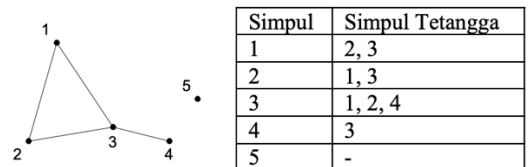
2. Matriks Bersisian (*Incidency Matrix*)

$A = [a_{ij}] \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian sisi } j \end{cases}$



Gambar 2.10 Contoh Representasi Graf dengan Matriks Sisi

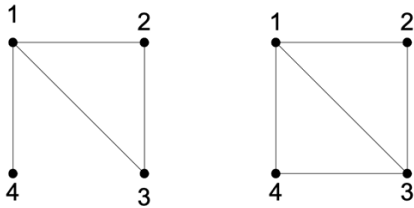
3. Senarai Ketetangaan (*Adjacency List*)



Gambar 2.11 Contoh Representasi Graf dengan Tabel Tetangga

Hamilton

Graf Hamilton adalah graf yang memiliki sirkuit Hamilton, yaitu sirkuit yang melalui semua simpulnya tepat satu kali, kecuali simpul awalnya karena simpul awal sama dengan simpul akhir. Sedangkan Graf semi-Hamilton adalah graf yang memiliki lintasan Hamilton, yaitu lintasan yang melewati semua simpulnya tepat satu kali, tetapi tidak Kembali ke simpul awal. Graf Hamilton pasti Graf semi-Hamilton, tetapi tidak sebaliknya.



Gambar 2.12 Contoh Graf Semi-Hamilton dan Graf Hamilton

Terdapat teorema yang menyatakan bahwa syarat cukup supaya graf sederhana G dengan n (≥ 3) buah simpul adalah graf Hamilton ialah bila derajat tiap simpul paling sedikit $n/2$ (yaitu, $d(v) \geq n/2$ untuk setiap simpul v di G). Berdasarkan pengertian tersebut, maka dapat dikatakan bahwa seluruh graf lengkap merupakan graf Hamilton. Untuk Menghitung jumlah kombinasi sirkuit yang dapat dihasilkan oleh graf lengkap, dapat dihitung dengan $(n-1)!/2$ dengan n adalah jumlah simpul pada graf tersebut.

III. PENERAPAN GRAF HAMILTON PADA RUTE TOUR EROPA BARAT

Eropa Barat

Benua Eropa merupakan benua terkecil di dunia setelah Australia, yaitu dengan luas daerahnya mencapai 10.180.000 km² dan jumlah penduduknya sekitar 7242,5 juta jiwa, ketiga tertinggi setelah Benua Asia dan Afrika. Secara geografis, Benua Eropa berada di daratan yang lebih dikenal dengan Eurasia. Benua Eropa memiliki daya Tarik sejarah yang kuat, hal ini ditandai dari banyaknya bangunan-bangunan bersejarah yang masih ada dan dijadikan sebagai destinasi utama para turis saat sedang berada disana. Selain itu, Eropa juga memiliki daya Tarik yang kuat pada bagian bahasa dan budaya yang beragam antara negara, seperti Indonesia.

Pembagian Wilayah Eropa ini dilakukan berdasarkan kebudayaannya sehingga pada saat ini Eropa terbagi menjadi Eropa Barat, Eropa Timur, Eropa Utara, Eropa Tengah, Eropa Selatan, dan Eropa Tenggara. Pada makalah ini, penulis akan membahas tentang Negara Negara di Eropa Barat.

Klasifikasi Negara Eropa Barat menurut "Geography: Realms, Regions, and Concepts" terdiri dari 13 Negara, yaitu

- Austria
- Belgium
- Republik Czech
- Perancis
- Jerman
- Irland
- Liechtenstein
- Luxembourg
- Monako
- Belanda
- Switzerland
- Inggris



Gambar 2.8 Map Eropa Barat

Pada pembahasan kali ini, penulis mengambil waktu libur yang digunakan untuk keliling Eropa Barat adalah 14 hari sehingga tidak memungkinkan untuk mengunjungi semua negara yang ada di Eropa dalam satu kali perjalanan. Akan dipilih 5 dari 13 negara yang ada untuk dikunjungi, dengan kombinatorial terdapat sebanyak ${}_{13}C_5 = 1287$ kombinasi yang ada, sehingga penulis menentukan negara yang akan dikunjungi adalah sebagai berikut

1. Inggris \rightarrow London (L)
2. Perancis, \rightarrow Paris (P)
3. Austria, \rightarrow Vienna (V)
4. Jerman, \rightarrow Berlin (B)
5. Belanda, \rightarrow Amsterdam (A)

Dengan Lokasi awal diasumsikan dari Jakarta, Indonesia

Representasi Waktu Perjalanan menjadi Graf

Perjalanan ini diasumsikan akan berawal dari Jakarta, Indonesia dan berakhir di Jakarta juga sehingga berikut adalah data waktu yang diperlukan untuk pergi ke lima negara tersebut dengan mengambil waktu tercepat dari yang ditempuh dengan pesawat.

Negara Tujuan	Durasi Perjalanan
London, Inggris	17 jam 55 menit
Paris, Perancis	18 jam
Vienna, Austria	17 jam 55 menit
Berlin, Jerman	17 jam 40 menit
Amsterdam, Belanda	17 jam 45 menit

Tabel 3.1 Durasi Perjalanan dari Jakarta ke Negara Tujuan

Sedangkan waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan antar negara tersebut menggunakan pesawat adalah sebagai berikut.

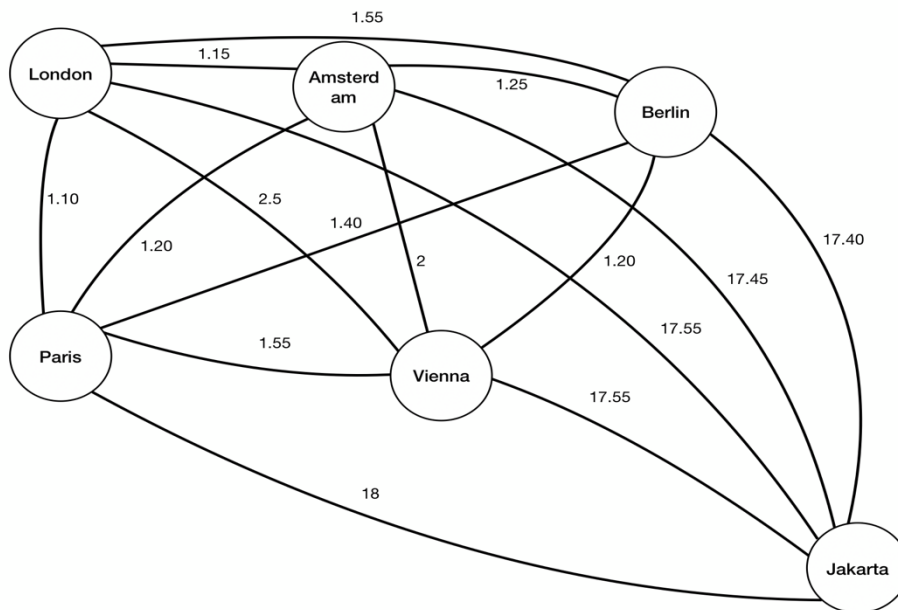
Negara	Durasi Perjalanan
London, Inggris - Paris, Perancis	1 jam 10 menit
London, Inggris - Vienna, Austria	2 jam 5 menit
London, Inggris - Berlin, Jerman	1 jam 50 menit
London, Inggris - Amsterdam, Belanda	1 jam 15 menit
Paris, Perancis - Vienna, Austria	1 jam 55 menit
Paris, Perancis - Berlin, Jerman	1 jam 40 menit
Paris, Perancis - Amsterdam, Belanda	1 jam 20 menit

Vienna, Austria - Berlin, Jerman	1 jam 20 menit
Vienna, Austria - Amsterdam, Belanda	2 jam
Berlin, Jerman - Amsterdam, Belanda	1 jam 25 menit

Tabel 3.2 Durasi Perjalanan dari Masing-Masing Negara

	J	L	P	V	B	A
J	-	17.55	18	17.55	17.40	17.45
L	17.55	-	1.10	2.05	1.55	1.15
P	18	1.10	-	1.55	1.40	1.20
V	17.55	2.05	1.55	-	1.20	2
B	17.40	1.55	1.40	1.20	-	1.25
A	17.45	1.15	1.20	2	1.25	-

Representasi Graf yang digunakan untuk permasalahan ini adalah graf berbobot dan tidak berarah, sehingga perjalanan pulang dari satu negara ke negara lain dianggap sama dengan perjalanan berangkatnya. Bila direpresentasikan dalam bentuk matriks ketetanggaan dan graf, maka hubungannya masing-masing menjadi sebagai berikut.



Menurut Teorema Hamilton, apabila graf tersebut adalah graf lengkap, maka graf itu dapat dipastikan merupakan graf Hamilton juga, sehingga graf representasi waktu tempuh diatas merupakan graf Hamilton. Dalam mencari kemungkinan sirkuit yang dilewati, dapat dicari dengan rumus :

$$(n-1)!/2,$$

Sehingga untuk kasus diatas kemungkinan sirkuit yang ada adalah 60 kombinasi. Pada makalah ini, penulis akan mencoba mengambil 10 buah sirkuit untuk dibandingkan perbedaannya.

1. Percobaan Pertama

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Berlin – Amsterdam – London – Paris – Vienna – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :
 $17.40 + 1.25 + 1.15 + 1.10 + 1.55 + 17.55 = 41.20$
 (41 Jam 20 Menit)

2. Percobaan Kedua

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Berlin – Vienna – London – Paris - Amsterdam – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :
 $17.40 + 1.20 + 2.05 + 1.10 + 1.20 + 17.45 = 41.20$
 (41 Jam 20 Menit)

3. Percobaan Ketiga

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Vienna – Amsterdam – London – Berlin - Paris– Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :
 $17.55 + 2 + 1.15 + 1.55 + 1.40 + 18 = 42.45$
 (42 jam 45 menit)

4. Percobaan Keempat

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Berlin – Paris – Amsterdam – Vienna – London – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :
 $17.40 + 1.40 + 1.20 + 2 + 2.05 + 17.55 = 42.40$
(42 jam 40 menit)

5. Percobaan 5

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Amsterdam – London – Vienna – Berlin – Paris – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :
 $17.45 + 1.15 + 2.05 + 1.20 + 1.40 + 18 = 42.05$
(42 jam 5 menit)

6. Percobaan 6

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – London – Paris – Amsterdam – Vienna – Berlin – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :
 $17.55 + 1.10 + 1.20 + 2 + 1.25 + 17.40 = 41.30$
(41 jam 30 menit)

7. Percobaan 7

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Paris – Vienna – London – Amsterdam – Berlin – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :
 $18 + 1.55 + 2.05 + 1.15 + 1.25 + 17.40 = 42.20$
(42 jam 20 menit)

8. Percobaan 8

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Amsterdam – Paris – Berlin – London – Vienna – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :
 $17.45 + 1.20 + 1.40 + 1.55 + 2.5 + 17.55 = 42.40$
(42 jam 40 menit)

9. Percobaan 9

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – London – Amsterdam – Paris – Berlin – Vienna – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :
 $17.55 + 1.15 + 1.20 + 1.40 + 1.20 + 17.55 = 41.25$
(41 jam 25 menit)

10. Percobaan 10

Lintasan yang akan dilalui adalah

Jakarta – Berlin – Vienna – Amsterdam – London – Paris – Jakarta.

Total waktu yang dibutuhkan dalam perjalanan :
 $17.40 + 1.20 + 2 + 1.15 + 1.10 + 18 = 41.25$
(41 jam 25 menit)

IV. KESIMPULAN

Pada percobaan tersebut, didapat waktu perjalanan tercepat untuk mengunjungi kelima negara tersebut adalah 41 jam 20 menit dengan jalur yang dilaluinya ada dua, yaitu

- Jakarta – Berlin – Amsterdam – London – Paris – Vienna – Jakarta, dan
- Jakarta – Berlin – Vienna – London – Paris – Amsterdam – Jakarta.

Sedangkan waktu perjalanan terlama adalah 42 jam 45 menit dengan jalur yang ditempuh adalah

- Jakarta – Vienna – Amsterdam – London – Berlin – Paris – Jakarta.

Dari data tersebut terlihat bahwa terdapat perbedaan 1 jam 25 menit dari waktu tercepat dan waktu terlama. Meskipun angka tersebut bukan merupakan angka yang besar, tetapi hal ini membuktikan bahwa pemilihan rute perjalanan yang tepat akan meringankan beban wisatawan dalam berpergian.

Selain itu dapat disimpulkan juga mencari rute terpendek dari teorema Hamilton dengan cara manual tidak efektif dalam penggunaan sehari-harinya apabila jumlah simpul dalam graf lengkap terhitung banyak.

V. UCAPAN TERMA KASIH

Puji syukur penulis panjatkan atas seluruh rahmat, pertolongan, serta ilmu yang dilimpahkan oleh Tuhan Yang Maha Esa. Oleh karena-Nya, penulis dapat menyelesaikan tugas ini dengan usaha sebaik – baiknya dan mengumpulkannya tepat waktu.

Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Ir. Rinaldi Munir, M.T., Ibu Dra. Harlili M.Sc, dan Ibu Fariska Zakhralatifa sebagai dosen Mata Kuliah IF2120 Matematika Diskrit – Semester I. Tahun 2020/2021. Selain itu penulis juga ingin berterima kasih kepada keluarga dan teman-teman penulis yang turut serta membantu penulis dalam seluruh rangkaian penyusunan makalah Matematika Diskrit ini, baik secara materiil maupun nonmateriil

DAFTAR PUSTAKA

- [1] J. Nijman, P.O. Muller, and H. J. de Bilj. 1971. Geography: Realms, Regions, and Concepts. 17th Edition.
- [2] Munir, Rinaldi. 2016. Matematika Diskrit. Edisi Revisi Keenam. Bandung: Informatika Bandung

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 3 Desember 2020



Syarifah Aisha Geubrina Yasmin - 13519089